

Title	確率積分の逆関数について (数値解析の基礎理論)
Author(s)	戸田, 英雄; 竹内, 寿一郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1971), 107: 22-39
Issue Date	1971-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/106344
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

確率積分の逆関数について

電 統 研 戸 田 英 雄
慶 大 工 竹 内 寿 一 郎

§ 1. 序

もっとも基本的と思われる連続型統計分布である正規分布, χ^2 分布, t 分布, F 分布について, これまでその展開式, 近似式などを検討してきた結果, 確率積分については自由度がかなり大きい場合を除き, 正確な積分値が容易に得られることがたしかめられた。そこで次にその逆関数であるパーセント点を求める方法について検討を加えてみた。

以下 § 2 では確率積分の逆関数についての一般的な解法について簡単に述べ, § 3 ではその例として正規分布, t 分布をとりあげ, § 4 では山内が *Campbell* の方法 [7] を改良した解法を非心 t 分布に関して詳しく述べ, 最後に統計的な推定検定の基本分布に関する計算機のライブラリ構成について § 5 でとりあげることとする。

ここでは正規分布に対して次のよう記号を用いることと

する。

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^u \phi(x) dx$$

§ 2. 確率積分の逆関数

2.1. 逐転法 (1)

統計分布の極限分布あるいは近似分布として正規分布が与えられ、密度関数が $f(x)$ である変数 x の関数 $g(x)$ が近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとすれば

$$P(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \doteq \Phi(u) \quad \text{ただし} \quad u = g(x)$$

となりその逆関数は

$$x = g^{-1}(u) \quad (1)$$

であらわれ、 $g(x)$ が簡単な関数であれば容易にパーセント点の近似式を求めることができる。

また2つの変数 x, y がそれぞれ独立でしかも近似的に正規分布 $N(\mu_x, \sigma_x^2), N(\mu_y, \sigma_y^2)$ に従うとき、 $v = x/y$ とすると

$$u = \frac{v\mu_y - \mu_x}{\sqrt{v^2\sigma_y^2 + \sigma_x^2}} \quad (2)$$

は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う。[6].

この式を逆転すれば分布 v のパーセント点の近似式が得られる。

2.2. 逆転法 (2) [4]

χ^2 分布, t 分布, F 分布およびそれらの非心分布そしてベータ分布に関して, 山内は一貫した方法で確率積分の逆関数を求めている。ある変量 x の密度関数を $f(x)$, $y=g(x)$ とし, y の極限分布の密度関数を $h(y)$ とする。まず確率積分を y の多項式で近似する。

$$P(x) = H(y) + y h(y) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} T_i(y) \quad (3)$$

ここで $H(y) = \int_{-\infty}^y h(t) dt$, $T_i(y)$ は y の多項式, α はパラメータである。

つぎに $T = \sum_{i=0}^{\infty} 1/\alpha^i T_i^*(y)$ とおき, $y_0 = y + yT$ とし $H(y_0)$ をテラ展開すると

$$H(y_0) = H(y) + y h(y) T + \frac{1}{2!} (Ty)^2 h'(y) + \dots \quad (4)$$

(3), (4) から $1/\alpha^i$ の係数を比較することにより

$$P(x) = H(y_0), \quad y_0 = y + y \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} T_i^*(y) \quad (5)$$

を得る。さて(5)の右式を逆転し, 逆関数を求める。

$$y = y_0 + y_0 \sum_{i=0}^{\infty} 1/\alpha^i S_i(y_0) \quad (6)$$

としたとき得られる恒等式

$$y \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} T_i^*(y) - y_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} S_i(y_0) = 0 \quad (7)$$

において $1/\alpha^i$ の係数を等しいとして (5) で求められた $T_i^*(y)$ に (6) を代入して $S_i(y_0)$ を得ることができる。そして

$$x = g^{-1}(y) \quad , \quad y = y_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^i} S_i(y_0) \quad (8)$$

が求める逆関数となる。

2.3. ニュートン・ラフソン法による数値解法

$P(x) = p$ を満たすパーセント点 x_p をニュートン・ラフソン法で求めると、

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P(x_i) - p}{f(x_i)} \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

なる反復を行なりことになる。ただし $P(x)$ は正確に、能率よく求められるとする。 p が極端に 0 または 1 に近いとすると $f(x_p) \approx 0$ であるから、初期値 x_0 は x_p の近くなないと、発散するかもしれない収束がずっとおそくなる。

2.4. 一松の方法による数値解法 [5]

一松の方法は前出のニュートン・ラフソン法に比べ x_i が多少 x_p からはずれていても発散することが少ない。収束もニュートン・ラフソン法よりはやい。

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon_i, \quad R = f^2(x_i) - 2\{P(x_i) - p\}f'(x_i) \text{ とし} \quad (10)$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -f(x_i)/f'(x_i) & R \leq 0 \text{ の場合} \\ 2\{P(x_i) - p\} / \{-f(x_i) - \sqrt{R}\} & R > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

(9) もしくは (10) でも収束しない場合, $P(x_i) - p$ がある程度まで小さくなるように試行錯誤法を用いて x_i を定め, その後で (9), (10) により収束をはやめるとよい。

2.5. 連立常微分方程式の数値解法による方法 [3]

連立常微分方程式において

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = g(x)f \\ \frac{dP}{dx} = f \end{cases} \quad (11)$$

独立変数を P にかえて確率積分の逆関数について

$$\begin{cases} \frac{dx}{dP} = \frac{1}{f} \\ \frac{df}{dP} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dP} = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow x'' = -(x')^2 g(x) \quad (12)$$

を解く問題にかえることができる。初期条件 $P = p_0$ のときの正確なパーセント点 x_0 とそこにおける密度関数値 $f(x_0)$, およびざみ中を与えることにより, パーセント点を得る。

2.6. 漸化式による確率積分と密度関数 [1]

ニュートン・ラフソン法, 一松の方法を用いる場合の注意をここに述べておく。 χ^2 , t , F 分布の確率積分を計算する

と3次の漸化式を用いると、積分値と同時に密度関数も容易に得ることが出来る。以下その漸化式を掲げる。

(χ^2 分布)

$$\begin{cases} Q(\chi^2; \nu) = Q(\chi^2; \nu-2) + S_\nu \\ S_\nu = \frac{\chi^2}{\nu-2} S_{\nu-2} \end{cases} \quad (13)$$

$$Q(\chi^2; 1) = 2\{1 - \Phi(\chi)\} \quad S_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

$$Q(\chi^2; 2) = e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad S_2 = e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

$$\therefore \quad Q(\chi^2; \nu) = \int_{\chi^2}^{\infty} f(\chi^2; \nu) d\chi^2, \quad f(\chi^2; \nu) = \frac{1}{2} S_\nu$$

(t , F 分布)

t , F 分布の確率積分はベータ分布の確率積分(パラメータが $1/2$ の整数倍)に帰着させることが出来る。

$$\begin{cases} I_x(a+1, b) = I_x(a, b) - \frac{1}{a} U(a, b) \\ I_x(a, b+1) = I_x(a, b) + \frac{1}{b} U(a, b) \\ U(a+1, b) = U(a, b)(a+b)x/a \\ U(a, b+1) = U(a, b)(a+b)(1-x)/b \end{cases} \quad (14)$$

$$I_x(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x(1-x)}$$

$$I_x(\frac{1}{2}, 1) = \sqrt{x} \quad U(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)}$$

$$I_x(1, \frac{1}{2}) = 1 - \sqrt{1-x} \quad U(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x}$$

$$I_x(1, 1) = x \quad U(1, 1) = x(1-x)$$

$$\therefore \quad U(a, b) = 1/B(a, b) x^a (1-x)^b$$

$$I_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad \text{である。}$$

§ 3. 確率積分の逆関数の検討

3.1. 逆転法 (1) による t 分布の近似式

自由度 ν の t 分布の平均は 0, 分散は $\nu/(\nu-2)$ であり, 自由度が大きくなると正規分布に近づくことから

$$t / \sqrt{\nu/(\nu-2)} \sim N(0, 1)$$

であり t 分布のパーセント点 $t(Q, \nu)$ の近似式

$$t(Q, \nu) \doteq \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} u(Q) \quad (15)$$

を得る。ただし $u(Q)$ は標準正規分布の上側 $100Q$ パーセント点である。また, $\sqrt{x}/\nu \sim N(1 - \frac{1}{4\nu}, \frac{1}{2\nu})$ を利用して (2) を適用すると,

$$t(Q, \nu) \doteq u(Q) \left\{ \left(1 - \frac{1}{4\nu}\right)^2 - \frac{1}{2\nu} u^2(Q) \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

を得る。これらの近似のよさについては [1] の (5) 1969. 2. に詳しく述べられている。

3.2. 逆転法 (2) による t 分布の近似式

t 分布の密度関数の対数を取り, ベータ関数をガンマ関数であらわし,

$$\ln \Gamma(\nu) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + (\nu - \frac{1}{2}) \ln \nu - \nu + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} B_i}{2i(2i-1) \nu^{2i-1}}$$

B_i はベルヌーイ数, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, \dots

を代入, 整理して項別積分を行なうと, (3) に対応する式

$$P(t; \nu) = \Phi(t) - t\phi(t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^i} T_i(t) \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(t) = \frac{1}{4}(t^2+1) \\ T_2(t) = \frac{1}{96}(3t^6-7t^4-5t^2-3) \\ T_3(t) = \frac{1}{384}(t^{10}-11t^8+14t^6+6t^4-3t^2-15) \\ \vdots \end{array} \right.$$

が求められる。更に (4) とおいて (5) に対応する式

$$P(t; \nu) = \Phi(t_0) \quad , \quad t_0 = t + t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^i} T_i^*(t) \quad (17)$$

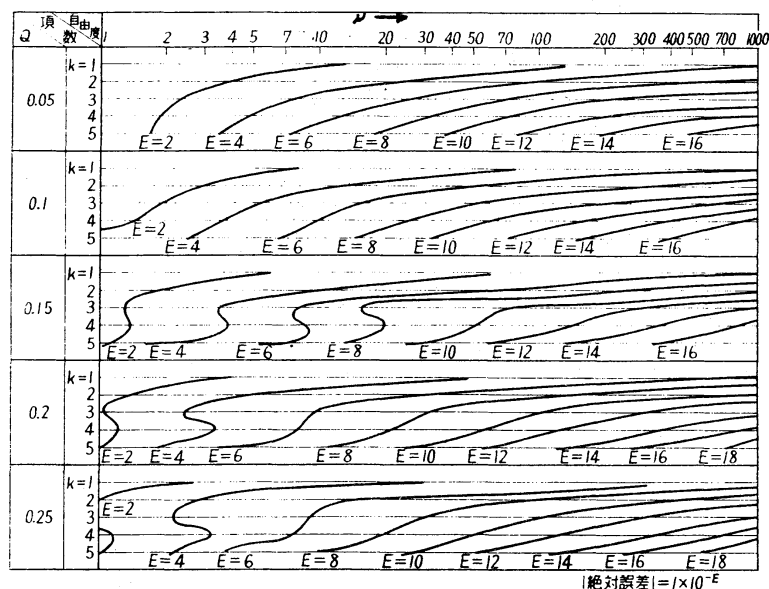
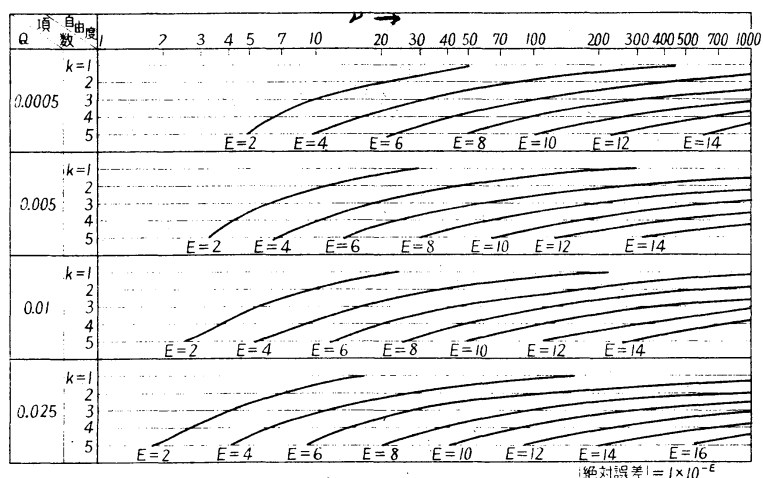
$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^*(t) = -\frac{1}{4}(t^3+t) \\ T_2^*(t) = \frac{1}{96}(13t^5+8t^3+3t) \\ T_3^*(t) = -\frac{1}{384}(35t^7+19t^5+t^3-15t) \\ \vdots \end{array} \right.$$

を得る。さて, (17) を逐次して,

$$t(Q, \nu) = u(Q) + \frac{1}{\nu} S_1(u(Q)) + \frac{1}{\nu^2} S_2(u(Q)) + \dots \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1(u) = \frac{1}{4}(u^3+u) \\ S_2(u) = \frac{1}{96}(5u^5+16u^3+3u) \\ S_3(u) = \frac{1}{384}(3u^7+19u^5+17u^3-5u) \\ \vdots \end{array} \right.$$

なる逆関数が求められる。



$$t(Q, \nu) = u(Q) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{\nu^i} S_i(u(Q)) \text{ の誤差曲線}$$

3.3. ニュートン・ラフソン法によるパーセント点

正規分布の上側確率 100Q パーセント点 $u(Q)$ をニュートン・ラフソン法で求めた。このとき初期値は 0.5 きざみ k がえと与えてみた。次の表は初期値を大きく, または小さくして

ったとき、はじめで発散してしまふ、大ときの初期値として許される値の上限と下限を示している。この表から正規分布の場合には初期値として大きな値をとると、小さな値を与えるより発散する可能性が高いことがわかる。

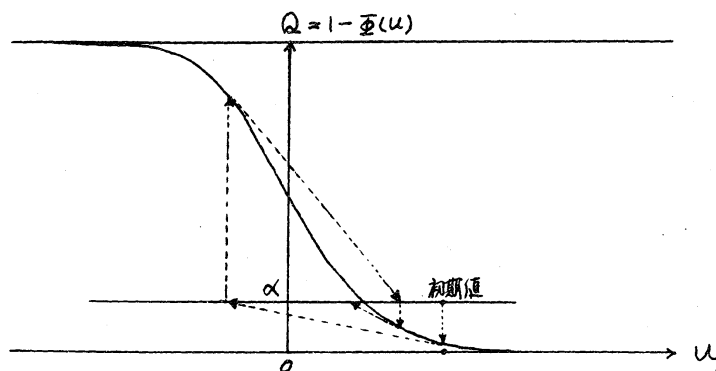
ニュートン・ラフソン法による 初期値の上限と下限			
Q	真値	初期値の下限	初期値の上限
$1.0_{10}-2$	2.326	-1.5	3.5
$1.0_{10}-5$	4.265	-1.5	5.0
$1.0_{10}-8$	5.612	-2.0	7.0
$1.0_{10}-11$	6.706	-2.0	7.5
$1.0_{10}-14$	7.651	-2.0	8.5
$1.0_{10}-17$	8.494	-2.0	9.5
$1.0_{10}-20$	9.262	-2.0	10.0
$1.0_{10}-23$	9.973	-2.0	10.5

3.4. 一松の方法によるパーセント点

つぎに一松の方法に対して同じ実験を行なふ。

一松の方法による 初期値の上限と下限			
Q	真値	初期値の下限	初期値の上限
$1.0_{10}-2$	2.326	-3.0	4.5
$1.0_{10}-5$	4.265	-3.0	6.0
$1.0_{10}-8$	5.612	-3.0	7.0
$1.0_{10}-11$	6.706	-3.0	8.0
$1.0_{10}-14$	7.651	-3.0	9.0
$1.0_{10}-17$	8.494	-3.5	9.5
$1.0_{10}-20$	9.262	-3.5	10.5
$1.0_{10}-23$	9.973	-3.5	11.0

これらの結果は分布関数から十分予測できる。



上図の場合収束するが、もう少し初期値が右にあると発散してしまうことになる。また α がもう少し大きくても発散する。

3.5. 連立常微分方程式の数値解

正規分布関数の逆関数をルンゲ・フット・ジル法を用いて解いた。

$$\begin{cases} \frac{du}{d\Phi} = \frac{1}{\phi} \\ \frac{d\phi}{d\Phi} = -u \end{cases} \iff \frac{d^2u}{d\Phi^2} = \left(\frac{du}{d\Phi}\right)^2 \cdot u$$

初期条件 $\begin{cases} u=0 \\ \Phi=0.5 \end{cases} \quad \phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$			初期条件 $\begin{cases} \Phi=0.95 \\ u=1.64485362695147 \end{cases}$		
きき幅 0.001			きき幅 0.0001		
Φ	誤差	真値	Φ	誤差	真値
0.6	-2.0_{10}^{-13}	0.253347...	0.96	-1.3_{10}^{-13}	1.75068...
0.7	-7.0_{10}^{-13}	0.524400...	0.97	-6.5_{10}^{-13}	1.88079...
0.8	-3.6_{10}^{-12}	0.841621...	0.98	-3.8_{10}^{-12}	2.05374...
0.9	-6.1_{10}^{-11}	1.28155...	0.99	-6.5_{10}^{-11}	2.33011...
0.95	-1.0_{10}^{-9}	1.64485...	0.995	-9.7_{10}^{-10}	2.7582...
0.99	-5.8_{10}^{-7}	2.32634...	0.999	-5.3_{10}^{-7}	3.09023...

§4. 山内流の逆転法 (Campbellの方法)

次のような問題に対して従来行なわれている近似法の近似の程度が、山内流の逆転法により式(19)の形で評価される。

問題 片側検定の検出力と非心度を求めること。

x_1, x_2, \dots, x_N を $N(\mu, \sigma)$ からの大きさ N の標本とする。

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad S = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S}{n}}, \quad n = N-1 \text{ 自由度}$$

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ (オ1種の過誤 α)

対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1$ (オ2種の過誤 β)

棄却域 $R: \bar{x} - \mu \geq t(\alpha, n) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$

ここで $t(\alpha, n)$ は自由度 n の t 分布で片側確率 α のパーセント点である。

1) オ1種の過誤 α を定め、非心度 δ を与えて検出力 $P=1-\beta$ を求める場合。

2) オ2種の過誤 β を定め、検出力 $P=1-\beta$ を得るような非心度 δ を求める場合。

の2通りの問題を考える。

式(19)の形で以上のことを表現すると、

$$P(t, n, \delta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \int_{\frac{t}{\sqrt{n}}x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(u-\delta)^2}{2}\right\} du \quad (19)$$

$$= 1 - \beta$$

$$P(t, n, 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{P(\frac{n}{2})} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \int_{\frac{t}{\sqrt{n}}x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (20)$$

$$= \alpha$$

において

1) は n, α, δ から x を求め $1 - \beta = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ から
 $1 - \beta$ を算出する,

2) は $n, \alpha, 1 - \beta$ から $1 - \beta = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ を満たす x を求め
 δ を算出する,

という問題になる。

山内流のやり方 [4]

$$\frac{d}{dt} P(t, n, \delta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t-\delta)^2\right\} \cdot \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! (4n)^k} U_k\right\} \quad (21)$$

ここで $\tau = t - \delta$ とおいて

$$U_1 = \tau^2(\tau+\delta)^2 - (\tau+\delta)^2 - \tau(\tau+\delta) - 1$$

$$U_2 = \tau^4(\tau+\delta)^4 - 6\tau^2(\tau+\delta)^4 - \frac{10}{3}\tau^3(\tau+\delta)^3$$

$$+ 3(\tau+\delta)^4 + 10\tau(\tau+\delta)^3 - 3\tau^2(\tau+\delta)^2$$

$$+ 3(\tau+\delta)^2 + \tau(\tau+\delta) + 1$$

$$U_3 = \dots$$

を求めておく。

$$P(t, n, \delta) = 1 - \beta = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \text{ を満たす } x \text{ を}$$

$$x = \tau + \frac{1}{1!4n} C_1 + \frac{1}{2!(4n)^2} C_2 + \frac{1}{3!(4n)^3} C_3 + \dots \quad (22)$$

とおいて C_1, C_2, C_3, \dots を定める。

$$C_1' = \frac{dC_1}{dt}, \quad C_2' = \frac{dC_2}{dt}, \quad \dots \text{ とすると}$$

$$C_1' - U_1 = \tau C_1$$

$$C_2' - U_2 - C_1 \{ \tau (C_1' + U_1) + C_1 \} = \tau C_2$$

\vdots

なる関係式を求め C_1, C_2, \dots を決定する。

$$x = \tau - \frac{1}{1!4n} [\tau t^2 + t]$$

$$+ \frac{1}{2!(4n)^2} \left[3\tau t^4 + \frac{4}{3}\tau^2 t^3 + \frac{2}{3}t^3 + 2\tau t^2 + t \right]$$

$-\dots$

(23)

が得られる。

δ は上式を逆転して求められる。

1) の場合

a. 正規近似 1
$$x = \frac{-\delta + t}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{2n}}} \quad (24)$$

b. 正規近似 2
$$x = \frac{-\delta + t \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{2n}}} \quad (25)$$

c. 山内の近似
$$x = t - \frac{1}{1!4n} [2t^2 + t] \\ + \frac{1}{2!(4n)^2} [3\tau t^4 + \frac{4}{3}\tau^2 t^3 + \frac{2}{3}\tau^3 t^2 + 2\tau t^2 + t] \\ - \dots \quad (26)$$

近似の評価

(24) は (26) で [] 内のオ 1 項のみをとったものであり, (25) は (26) で [] 内のオ 1 項は一致し, $1/(4n)$ のオ - τ - で [] 内が完全に一致している。

2) の場合

a. 正規近似 1
$$\delta = t - x \sqrt{1 + \frac{t^2}{2n}} \quad (27)$$

(Johnson & Welch)

b. 正規近似 2
$$\delta = t \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - x \sqrt{1 + \frac{t^2}{2n}} \quad (28)$$

c. 2.1内の近似

$$\delta = t - x$$

$$+ \frac{1}{1!(4n)} [-xt^2 - t]$$

$$+ \frac{1}{2!(4n)^2} [xt^4 + \frac{4}{3}x^2t^3 - \frac{4}{3}t^3 + 2xt^2 + t]$$

$$+ \frac{1}{3!(4n)^3} [-3xt^6 - 8x^2t^5 + 8t^5 - 6xt^4 + 4x^2t^2 - 4t^3 + 12xt^2 + 15t]$$

+ ...

(29)

近似の評価

(27) は (29) で [] 内のオ 1 項のみと、 t もの、また (28) は

$$\delta = t - x + \frac{1}{4n} [-xt^2 - t] + \frac{1}{2!(4n)^2} [xt^4 - t] + \frac{1}{3!(4n)^3} [-3xt^6 - 3t] + \dots$$

と書け、 $1/(4n)$ のオ - t - t - t で完全に一致している。

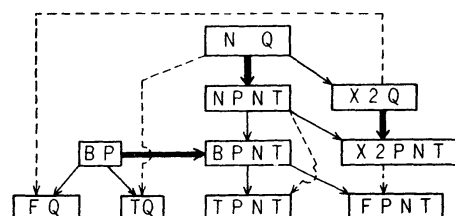
§.5. 統計分布に関するライブラリ

研究を目的とした統計分布のライブラリとしては、確率分布の積分値やパーセント点が精度よくしかも広範囲のパラメータに対し求められることが要求される。その要求を満たす効率の良いライブラリ構成の一例を下図に示す。

先の4つの分布の間には深い関連があり、それらの確率積分やパーセント点を計算するとき、それぞれを独立にサブルーチンとして登録しておき、適宜それらをよびだして使うようにするとよい。たとえば χ^2 分布の確率積分において、自由度が奇数であれば正規分布の確率積分が必要になるし、自由度が無限大の F 分布は χ^2 分布であり、また自由度が1の F 分布は t 分布になっている。さらに χ^2 分布、 t 分布、 F 分布のパーセント点を求める場合の初期値の計算には正規分布のパーセント点が必要となる。

ライブラリに登録するサブルーチンは①正規分布、② χ^2 分布、③ t 分布、④ F 分布のそれぞれの確率積分とパーセント点の合計8つのサブルーチンであるが、そのうち t 分布は F 分布の特殊な場合であることを考慮し、さらに F 分布と同等なベータ分布を導入することにより次のような結びつきを考える。

統計分布のライブラリの構成



NQ.....正規分布の上側確率積分
 NPNT.....正規分布のパーセント点
 X2Q..... χ^2 分布の上側確率積分
 X2PNT..... χ^2 分布のパーセント点
 TQ..... t 分布の上側確率積分
 TPNT..... t 分布のパーセント点
 FQ..... F 分布の上側確率積分
 FPNT..... F 分布のパーセント点
 BP.....ベータ分布の確率積分
 BPNT.....ベータ分布のパーセント点

太い矢印の部分は反復してコールすることを示し、あとの矢印は一度コールするだけでよい結びつきを示している。

[参考文献]

- [1] 戸田・清水・竹内：統計分布と電子計算機 (1) (2) (3) (4) (5) (6) (11) (18) 「標準化と品質管理」 1968. 9, 11, 12, 1969. 1, 2, 3, 8, 1970. 4. 日本規格協会
- [2] Toda H., Shimizu T., Takeuchi J. (1969): Notes on the approximations to the statistical distributions, Proc. of ICQC'69-Tokyo

pp. 527-530.

- [3] 吉沢 正 : 統計分布と電子計算機 (14) (15) 「標準化と品質管理」 1969. 12, 1970 1. 日本規格協会.
- [4] 山内 二郎 : 講義 1 - 1
- [5] Hitotumatu S. (1962): A method of successive approximation based on the expansion of second order, *Math. Japonicae*. 7.
pp. 31-50.
- [6] Geary R. C. (1930): The frequency distribution of the quotient of two normal variables, *Journal of Roy. Stat. Soc.*
Vol 93. pp 442.
- [7] Campbell G. A. (1923): Probability curve showing Poisson's exponential summation, *Bell System Tech. Journal* Vol. 2.
pp 95-113.